数理解析研究所講究録
166巻 1972年 54-76

作用素環の接合積における或る結果について

大阪教育大　高井博司

§1. 序

作用素環の接合積に関する研究は、1950年代の後半に東北大の研究者によるグループが、種々の議論を展開して、今日のこの方面での基礎を築いたけれども、元来はMurrayとvon Neumannによるfactorのexampleに起因している。そして今日では、接合積の理論は、多方面に於いて用いられるに至った。例えばChingによるII_1-factorの存在と([5])、non-hyperfiniteなIII-factorが非可算無限有ることの証明や([6])、最近では、Nakamura-TakedaによるGaloisの理論([18])の一般化をHenleがやっている。([14])

一方C^*-algebraの接合積についてはTurumaru([25])により始めて導入されその後この理論が[redacted]確になりcontinuous groupによるC^*-接合積の議論がGlimm([11])、Effros([10])、Guichardet([12],[13])、などによりなされ、Zeller-Meier([26])がそれらを体

系的にまとめ議論を展開した。　このpaperでは最近得た2、3の結果について述べてみることにする。

§2.　作用素環の接合積の構成

先ず、von Neumann algebra から話をする。$\mathcal{M}$ を Hilbert space $\mathfrak{H}$ 上の von Neumann algebra とする。　$\|\sum_{g\in G} g\otimes\xi_g\| \equiv \sum_g \|\xi_g\|^2 < +\infty$ なる $\sum_{g\in G} g\otimes\xi_g$ の全体を $G\otimes\mathfrak{H}$ で表わすことにする。ただし G は $\mathcal{M}$ 上の countable (discrete) automorphism group である。今 $G\otimes\mathfrak{H}$ に Hilbert space の構造を次の様にして入れる：

$\sum g\otimes\xi_g,\ \sum h\otimes\eta_h \in G\otimes\mathfrak{H}$ に対して

$$\left(\sum g\otimes\xi_g\right)+\left(\sum h\otimes\eta_h\right) = \sum k\otimes(\xi_k+\eta_k)$$

$$\lambda\left(\sum g\otimes\xi_g\right) = \sum g\otimes(\lambda\xi_g) \qquad (\lambda\in\mathbb{C})$$

$$\left\langle \sum g\otimes\xi_g \,\middle|\, \sum h\otimes\eta_h \right\rangle = \sum_g \langle\xi_g|\eta_g\rangle$$

そしてこの Hilbert space $G\otimes\mathfrak{H}$ 上の bounded linear operator を次の様に定義する：

$g\in G,\ x\in\mathcal{M}$ に対して

$$(g\otimes x)\left(\sum_h h\otimes\xi_h\right) = \sum_h hg^{-1}\otimes h(x)\xi_h$$

$$\left(\sum h\otimes\xi_h \in G\otimes\mathfrak{H}\right)$$

この時、($\mathcal{M}$ の G による接合積) $G\otimes\mathcal{M}$ を $g\otimes x$ $(g\in G,\ x\in\mathcal{M})$ で生成される von Neumann algebra とおくと、　$g\otimes x,\ h\otimes y \in G\otimes\mathcal{M}$ に対してこれらの積と *operation それから automorphism の関係は次の式で表わされ

る：

$$(g\otimes x)(h\otimes y) = gh\otimes h^{-1}(x)y$$

$$(g\otimes x)^* = g^{-1}\otimes g(x^*)$$

$$(g\otimes 1)(1\otimes x)(g\otimes 1)^* = 1\otimes g(x) \qquad (g,h\in G,\ x,y\in M)$$

今 $G\otimes M$ から $1\otimes M$ への mapping を次の様に定義する：

$$\varepsilon(T) = \sum_{g\in G} P_g T P_g \qquad (T\in G\otimes M)$$

ただし P_g は $G\otimes\mathfrak{H}$ から $g\otimes\mathfrak{H}$ への projection である．その時 ε は $G\otimes M$ から $1\otimes M$ への faithful normal expectation になる．以下これを canonical expectation と呼ぶことにする．さて今 φ を M 上の faithful normal state とし $\tilde{\varphi}=\varphi\cdot\varepsilon$ とおくと $\tilde{\varphi}$ は $G\otimes M$ 上の faithful normal state となりよく知られているように $G\otimes M$ の任意の element T は uniquely に Fourier 展開されて次の様に書ける。

$$T = \sum_g g\otimes x_g \quad (\text{w.r.t } \tilde{\varphi}\text{-norm}) \quad (x_g\in M).$$

実際は $x_g=\varepsilon((g\otimes 1)^* T)$ となる．([14])

次に C^* 接合積の話を少し述べよう．$\mathfrak{A}$ を C^*-algebra とし G をその上の countable discrete automorphism group とする。$l^1(G;\mathfrak{A})$ で G から $\mathfrak{A}$ への mapping F で $\sum_g \|F_g\|<+\infty$ なる条件を満足するもの全体を表わす．$l^1(G;\mathfrak{A})\ni F, G$ に対して積と * operation 及び norm を次の様に定義する：

$$(FG)_g = \sum_h F_h\, h(G_{h^{-1}g})$$

$$(F^*)_g = g(F^*_{g^{-1}})$$
$$\|F\|_1 = \sum_g \|F_g\|,$$

その時 $l^1(G;\mathcal{A})$ は Banach *algebra となり、これは group algebra $l^1(G)$ の拡張になっていると考えられる。さらに $l^1(G;\mathcal{A}) \ni F$ に対して

$$\|F\|_\nu = \sup_{\pi \in \mathrm{Rep}\, l^1(G;\mathcal{A})} \|\pi(F)\|$$

とおくと $\|\cdot\|_\nu$ は $l^1(G;\mathcal{A})$ 上の C^*norm になり

$$G \otimes_\nu \mathcal{A} = \overline{(l^1(G;\mathcal{A}), \|\cdot\|_\nu)}$$

とおき $\mathcal{A}$ の G による C^*接合積と呼ぶことにする。$\mathcal{A} = \mathbb{C}$ の場合は G の enveloping C^*algebra $C^*(G)$ である。([26])
さらに $l^1(G;\mathcal{A}) \ni F$ に対して

$$\|F\|_\alpha = \sup_{\rho \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{A}} \|(\mathrm{Ind}\,\rho)(F)\|$$

とおく。 ただし $\mathrm{Ind}\,\rho$ は $(\mathrm{Ind}\,\rho)(F)$ の matrix 表示が $(\mathrm{Ind}\,\rho)(F)_{s,t} = \rho[s^{-1}(F_{st^{-1}})]$ なる $l^1(G;\mathcal{A})$ から $G \otimes \mathcal{H}_\rho$ 上への表現を意味する。
その時 $\|\cdot\|_\alpha$ も同様にして $l^1(G;\mathcal{A})$ 上の C^*norm になり

$$G \otimes_\alpha \mathcal{A} = \overline{(l^1(G;\mathcal{A}), \|\cdot\|_\alpha)}$$

とおきこの C^*algebra を reduced な接合積と呼ぶことにする。([26]) これは Turumaru による C^*接合積に一致する。([26]) しかも $(G \otimes_\alpha \mathbb{C})^\wedge = \hat{G}_r$ となる。([26])

§3. Extension property と property T

先ず Tomiyama([24]) による extension property (略して(E.P)と書く)を接合積の中に持ち込んだ話をしよう。 $\mathcal{A}$ を unital C*-algebra とする。今 $\mathcal{A}$ が(E.P)を持つ(略して $\mathcal{A}\in$(E.P)と書く)と云うのを $\mathcal{A}$ を含む任意の unital C*-algebra $\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{B}$ から $\mathcal{A}$ への expectation ε が存在する時を云う。 $\mathcal{A}$ が $\mathfrak{H}$ 上の von Neumann algebra の時は $\mathcal{A}\in$(E.P) なる必要かつ十分な条件は $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ から $\mathcal{A}$ への expectation ε が存在することである。([24]) これを使って次の定理を証明する

定理1. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{H}$ 上の finite von Neumann algebra とし G を $\mathcal{M}$ 上の countable discrete group とする。 そして τ を normalized な normal G-invariant trace (on $\mathcal{M}$) とする。 その時 $G\otimes\mathcal{M}\in$(E.P) なる為の必要十分条件は $\mathcal{M}\in$(E.P) かつ G が amenable であることである。

証明：

もし $G\otimes\mathcal{M}\in$(E.P) なら $\mathcal{L}(G\otimes\mathfrak{H})$ から $G\otimes\mathcal{M}$ への expectation $\tilde{\pi}$ が存在する。 $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ から $\mathcal{M}$ への expectation π としては

$$\pi = \Phi^{-1}\circ e\circ\tilde{\pi}\circ\Phi$$

とおけばよい。 ただし Φ は $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ から $\mathcal{L}(G\otimes\mathfrak{H})$ への ampliation であり、e は $G\otimes\mathcal{M}$ から $1\otimes\mathcal{M}$ への canonical expectation である。 よって $\mathcal{M}\in$(E.P) である。 次に G が amenable を云う為に次の補題

をおく.

補題2. ([3]) $\ell^\infty(G)$ から $\mathcal{L}(G\otimes\mathcal{H})$ への *positive linear map* で次の性質を満たすものが存在する。

$f\mapsto A_f$ を求めるものとすると $A_1=I$, $(g\otimes 1)A_f(g\otimes 1)^*=A_{f_g}$ ただし $f_g(h)=f(hg)$ なる $\ell^\infty(G)$ の *element* である。

証明：

$$A_f(\Sigma g\otimes x_g)=\Sigma_g f(g)\, g\otimes x_g \quad \text{とおけばよい。}$$

さて本論に戻って

$$\tilde{\tau}[\Sigma g\otimes x_g]=\Sigma_g \delta_{g,e}\,\tau(x_g)$$

とおくと、$\tilde{\tau}$ は $G\otimes\mathcal{M}$ 上の *normalized normal trace* となる。そこで $\ell^\infty(G)$ 上の函数 μ を

$$\mu(f)=\langle A_f,\ {}^t\tilde{\pi}(\tilde{\tau})\rangle \qquad (f\in\ell^\infty(G))$$

とおく。 ただし A_f は補題2に於ける $G\otimes\mathcal{H}$ 上の *operator* である。${}^t\tilde{\pi}$ は $\tilde{\pi}$ の *transpose map* である。 その時 μ は $\ell^\infty(G)$ 上の *mean* になることは明らかである。 さらに

$$\begin{aligned}\mu(f_g) &= \langle A_{f_g}\ {}^t\tilde{\pi}(\tilde{\tau})\rangle=\langle (g\otimes 1)A_f(g\otimes 1)^*,\ {}^t\tilde{\pi}(\tilde{\tau})\rangle\\ &=\langle (g\otimes 1)\tilde{\pi}(A_f)(g\otimes 1)^*,\ \tilde{\tau}\rangle=\langle\tilde{\pi}(A_f),\tilde{\tau}\rangle\\ &=\mu(f) \qquad\qquad (g\in G)\end{aligned}$$

よって μ は $\ell^\infty(G)$ 上の *right invariant mean* となり G は *amenable* になる。

逆に $\mathcal{M}\in(\mathrm{EP})$ とし G を *amenable* とすると、*Tomiyama* ([24])により

$\mathcal{M}'\in(E.P)$ より $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ から $\mathcal{M}'$ への expectation π' が存在する。さらに $\mathcal{L}(G\otimes\mathcal{H})$ から $\mathcal{L}(\ell^2(G))\otimes\mathcal{M}'$ への expectation $1\otimes\pi'$ で $(1\otimes\pi')(x\otimes y)=x\otimes\pi'(y)$ なる条件を満たすものが存在する。 $\mathcal{L}(\ell^2(G))\otimes\mathcal{M}'=(1\otimes\mathcal{M})'$ より任意の $X\in\mathcal{L}(G\otimes\mathcal{H})$ に対して $(1\otimes\pi')(X)\in(1\otimes\mathcal{M})'$ よって

(1) $$(g\otimes1)(1\otimes\pi')(X)(g\otimes1)\in(1\otimes\mathcal{M})'$$

G は amenable より invariant measure μ が G 上に存在する。ゆえに(1)より

(2) $$\int_G(g\otimes1)(1\otimes\pi')(X)(g\otimes1)^*d\mu(g)\in(1\otimes\mathcal{M})'$$

又 $h\otimes1\in G\otimes1$ に対して

$$\begin{aligned}&(h\otimes1)\left\{\int_G(g\otimes1)(1\otimes\pi')(X)(g\otimes1)^*d\mu(g)\right\}(h\otimes1)^*\\&=\int(hg\otimes1)(1\otimes\pi')(X)(hg\otimes1)^*d\mu(g)\\&=\int(g\otimes1)(1\otimes\pi')(X)(g\otimes1)^*d\mu(g)\end{aligned}$$

よって(2)より

(3) $$\int_G(g\otimes1)(1\otimes\pi')(X)(g\otimes1)^*d\mu(g)\in(G\otimes\mathcal{M})'$$

よって

(4) $$\overline{co}^w\{U(1\otimes\pi')(X)U^*;\ U\text{ は }G\otimes\mathcal{M}\text{ の unitary}\}\cap(G\otimes\mathcal{M})'\neq\phi$$

Tomiyama ([24]) により (4) から $(1\otimes\mathcal{M})'$ より $(G\otimes\mathcal{M})'$ への expectation ρ が存在する.

$$\tilde{\pi}'=\rho\circ(1\otimes\pi')$$

とおくと $\tilde{\pi}'$ は $\mathcal{L}(G\otimes\mathcal{H})$ から $(G\otimes\mathcal{M})'$ への expectation である。ゆえに $(G\otimes\mathcal{M})'\in(E.P)$ よって $G\otimes\mathcal{M}\in(E.P)$ となり証明が終る。

これは次の系の拡張になっていると考えられる。

系3. ([24]) Gをcountable discrete groupとする。その時Gによるgroup von Neumann algebra $U(G)$が(EP)を持つ為の必要十分な条件はGがamenableとなることである。

この系に関連して極最近Lanceは$C^*(G)$がProperty Tを持つ為の必十条件はGがamenableである、という結果を出したが、これはC^*接合積の中に話を持ち込むことが出来ることを以下に述べよう。ただしここでいうProperty Tと云うのは$\mathcal{A}$をC^*-algebraとした時に$\mathcal{A}$がProperty Tを持つと云うのを(以下$\mathcal{A}\in(T)$と書く)任意のC^*-algebra $\mathcal{B}$に対して$\mathcal{A}\otimes_\alpha\mathcal{B}=\mathcal{A}\otimes_\nu\mathcal{B}$が成り立つことをそういうのである。([22])

さて次のことを示そう。(証明はTakesakiによるところが多い)

定理4. $\mathcal{A}$をseparable C^*-algebraとしGをその上のdiscrete automorphism groupとする。その時$G\otimes_\alpha\mathcal{A}\in(T)$なる為の必要十条件は$\mathcal{A}\in(T)$で$G$がamenableとなることである。

証明：

もし$G\otimes_\alpha\mathcal{A}\in(T)$ならば任意の$C^*$-algebra $\mathcal{B}$に対して

$$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}\subset(G\otimes_\alpha\mathcal{A})\odot\mathcal{B},$$

ただし$\odot$は代数的なtensor productを意味する。$(G\otimes_\alpha\mathcal{A})\odot\mathcal{B}$上で$\alpha=\nu$より$\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$上で$\alpha=\nu$、よって$\mathcal{A}\in(T)$となる。次に$G$がamenableになることを示す。$\pi$を$\mathcal{A}$の$\mathfrak{H}_\pi$上へのstandard表現とし、

6:

J_πを$\mathfrak{H}_\pi$上のinvolutionとする. $(\mathfrak{G};\mathfrak{A})$のcovariant表現を次の様に定義する:

$$(\tilde{\ell}(s)\xi)(t)=\xi(ts)\quad,\quad(\tilde{\pi}(x)\xi)(t)=\pi\circ t(x)\xi(t)$$

$$(\tilde{r}(s)\xi)(t)=\xi(s^{-1}t)\quad,\quad(\tilde{\pi}'(x)\xi)(t)=J_\pi\pi\circ t^{-1}(x)J_\pi\xi(t^{-1})\qquad([28])$$

$$\left(\begin{array}{c} t,s\in\mathfrak{G}\ ,\ x\in\mathfrak{A} \\ \xi\in\ell^2(\mathfrak{G})\otimes\mathfrak{H}_\pi\end{array}\right)$$

さらに$\mathfrak{G}\otimes_\nu\mathfrak{A}\ni F$に対して

$$\pi(F)=\sum_{g\in\mathfrak{G}}\tilde{\pi}(F_g)\tilde{\ell}(g)$$

$$\pi'(F)=\sum_{g\in\mathfrak{G}}\tilde{\pi}'(F_g)\tilde{r}(g)$$

とおくと、π,π'は$\mathfrak{G}\otimes_\nu\mathfrak{A}$の$\ell^2(\mathfrak{G})\otimes\mathfrak{H}_\pi$上の表現となる. 明らかに$\pi,\pi'$は可換より$(\mathfrak{G}\otimes_\nu\mathfrak{A})\hat{\otimes}_\nu(\mathfrak{G}\otimes_\nu\mathfrak{A})$の$\ell^2(\mathfrak{G})\otimes\mathfrak{H}_\pi$上への表現$\pi_0$で次の条件を満たすものが存在する:

$$\pi_0(F\otimes G)=\pi(F)\pi'(G)\qquad(F,G\in\mathfrak{G}\otimes_\nu\mathfrak{A})$$

π_0の作り方より$\pi_0|_{\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}}=\tilde{\ell}\times\tilde{r}$より$\ell\times r$にquasi-equivalentである。 ただしℓ,rはそれぞれ$\mathfrak{G}$から$\ell^2(\mathfrak{G})$上のlift regular, right regular表現である. 今仮定より$\mathfrak{G}\otimes_\nu\mathfrak{A}\in(T)$だから次のことが成立する:

$$(\mathfrak{G}\otimes_\nu\mathfrak{A})\hat{\otimes}_\nu(\mathfrak{G}\otimes_\nu\mathfrak{A})=(\mathfrak{G}\otimes_\nu\mathfrak{A})\hat{\otimes}_\alpha(\mathfrak{G}\otimes_\nu\mathfrak{A}),$$

だからπ_0はα-normに関してcontinuousである。 よって$\ell\times r$はα-normに関してcontinuousである. だからLanceによって$\mathfrak{G}$はamenableである。 逆に$\mathfrak{A}\in(T)$で$\mathfrak{G}$がamenableとすると、

Zeller-Meier によって $G\otimes_{\alpha}\mathcal{A}=G\otimes_{\alpha}\mathcal{A}$ である。$\mathcal{A}\in(T)$だから、任意の C^*-algebra $\mathcal{B}$ に対して

$$(G\otimes_{\alpha}\mathcal{A})\hat{\otimes}_{\alpha}\mathcal{B} = G\otimes_{\alpha}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\alpha}\mathcal{B}) = G\otimes_{\alpha}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\alpha}\mathcal{B})$$
$$= G\otimes_{\alpha}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_{\alpha}\mathcal{B}) = (G\otimes_{\alpha}\mathcal{A})\hat{\otimes}_{\alpha}\mathcal{B}$$
$$= (G\otimes_{\alpha}\mathcal{A})\hat{\otimes}_{\alpha}\mathcal{B},$$

よって $G\otimes_{\alpha}\mathcal{A}\in(T)$となる。　　　　　　　　　　証明終.

注： C^*-algebra の type(E) の話も同様に出来るように思われる。

§4. Inequivalent non approximately finite groups

Kriegerは([15])の中で inequivalent な nonapproximately finite な2つの group を与えたが、ここでは Choda の結果を用いて3つの inequivalent な non approximately finite group の example を与える。　先ず Dye と Haga ([9],[27]) による full group の話を少ししておく。　$\mathcal{M}$ を von Neumann algebra とし G をその上の countable automorphism group とする。今$[G]$を次の様に定義する：

$$[G]=\{\alpha\in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})\ ;\ \sup_{\beta\in G} F(\alpha,\beta)=1\},$$

ただし

$$F(\alpha,\beta)=\text{largest}\{P\in(\mathcal{M}\cap\mathcal{M}')^P \mid \alpha^{-1}\beta\ ;\ \text{inner on } \mathcal{M}_P\}$$

と定義する。$[\mathfrak{G}]$は$\mathfrak{G}$を含む group になり$[[\mathfrak{G}]]=[\mathfrak{G}]$を満たす。この group を$\mathfrak{G}$による <u>full group</u> という。さて今M_iを von Neumann algebra $(i=1,2)$としα, βをそれぞれM_1, M_2上の automorphism とする。ΦをM_1からM_2上への isomorphism とした時$\Phi(\alpha)$, $\Phi^{-1}(\beta)$を次の様に定義する：

$$\Phi(\alpha)=\Phi\circ\alpha\circ\Phi^{-1}, \quad \Phi^{-1}(\beta)=\Phi^{-1}\circ\beta\circ\Phi$$

その時$\Phi(\alpha)$, $\Phi^{-1}(\beta)$はそれぞれM_2, M_1上の automorphism となる。この notation を使って Dye による weak equivalence の notion を導入する。$\mathfrak{G}_i$をM_i上の countable automorphism group とする。$(i=1,2)$ $\mathfrak{G}_1$と$\mathfrak{G}_2$が <u>equivalent</u> (Dye による weakly equivalent) であると云うのをM_1からM_2上への isomorphism Φで次の条件を満たす時を云う：

$$[\Phi^{-1}(\mathfrak{G}_2)]=[\mathfrak{G}_1] \quad .$$

equivalence の特徴付けとして Choda による次の定理がある：

<u>定理5.</u>[2] M_iを abelian von Neumann algebra とし、τ_iをM_i上の normalized faithful normal trace とし、$\mathfrak{G}_i$をτ_i-preserving なM_i上の countable freely acting automorphism group とする。その時、$\mathfrak{G}_1$と$\mathfrak{G}_2$が equivalent である為の必要十分条件は$\mathfrak{G}_1 \otimes M_1$から$\mathfrak{G}_2 \otimes M_2$上への isomorphism Φが存在して次の条件を満足することである：

$$\Phi(M_1)=M_2 \quad .$$

これによりもし $G_1\otimes\mathcal{M}_1$ から $G_2\otimes\mathcal{M}_2$ への isomorphism が存在しないならば G_1 と G_2 は inequivalent である。　一方 Dye による group の approximate finiteness について少し述べる。([9])　(X,Σ,μ) を standard normalized measure space とし G をその上の countable freely acting automorphism group とする。　G が approximately finite であると云うのを任意の $\varepsilon>0$ と G の元 $(g_i)_{i=1}^n$ に対して G の finite subgroup G_0 と G_0 の元 $(h_i)_{i=1}^n$ で次の条件を満たすものが存在することである：

$$\sup_{E\in\Sigma}\mu(Eg_i\,\Delta\,Eh_i)\le\varepsilon \qquad (1\le i\le n).$$

Dye により G が non approximately finite である為の十分条件は G の subset A と元 $(g_i)_{i=1}^3$ で

(*)　$A\cup g_1A=G,\ g_2A\cap g_3A=\phi,\ g_2A\cup g_3A\subset g_1A$

なるものが存在することである。　例えば Φ_2 を元 u,v から生成される free group とすると $A=\{u^n\cdots\mid n\neq 0\}$, $g_1=u$, $g_2=v$, $g_3=v^{-1}$ とおくと(*)を満たすから Φ_2 は non approximately finite group である。([9])　Π を finite permutation group とする。その時、Murray-von Neumann により Φ_2,Π はそれぞれ或る maximal abelian von Neumann algebra 上の trace preserving な freely acting, ergodic automorphism group として表現される。その algebra を $\mathcal{A},\mathcal{B}$ とすると、よく知られているように $\Pi\otimes\mathcal{B}$ は Property Γ を持ち $\Phi_2\otimes\mathcal{A}$ は持たない。([17]) [redacted] 一方 Saito により $(\Phi_2\times\Pi)\otimes(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ は

$(\Phi_2\otimes\mathcal{A})\otimes(\Pi\otimes\mathcal{B})$ に isomorphic より([19])、Misonouの結果より、$(\Phi_2\times\Pi)\otimes(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ は Property Γ を持つ。([16]) よって定理5を使うと次のKriegerの結果を得る：

<u>定理6.</u>([15]) Φ_2 と $\Phi_2\times\Pi$ は互いに inequivalent な non approximately finite な countable freely acting ergodic group である。

さて3つ目のgroupを作る為に次に一連の補助定理を証明なしに述べる：

先ずBuresによるものとして

<u>補助定理7.</u>([1]) $\mathcal{A}_n$ を maximal abelian von Neumann algebra とし、G_n をその上の freely acting ergodic automorphism group とする。さらに x_n を $\mathcal{A}_n$ に対する separating かつ generating unit vector とすると、$(n\geq 1)$

(i) G_n の restricted direct product $\coprod_n G_n$ は (x_n)-adic tensor product $\bigotimes_n^{(x_n)}\mathcal{A}_n$ 上の freely acting ergodic group となる。

(ii)

$$\Big(\coprod_n G_n\Big)\otimes\Big(\bigotimes_n^{(x_n)}\mathcal{A}_n\Big) \text{ は } \bigotimes_n^{(\delta_{e_n}\otimes x_n)}(G_n\otimes\mathcal{A}_n) \text{ に同型}$$

になる。ただし e_n は G_n の unit element である。

次にSakaiによるものとして

<u>補助定理8.</u>([20]) $\mathcal{M}$ を finite factor とすると $\mathcal{M}$ の e-adic tensor product $\bigotimes_n^{e}\mathcal{M}_n$ $(\mathcal{M}_n=\mathcal{M})$ は asymptotically abelian である。(略して $\bigotimes_n^{e}\mathcal{M}_n\in(A.A)$ と書く。)

$\Phi_2, (\Phi_2\times\Pi)$ をそれぞれ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 上で作用しているとすると

補助定理9. $\Phi_2\otimes\mathcal{A}, (\Phi_2\times\Pi)\otimes\mathcal{B} \notin (A.A)$

これだけの準備をして主結果を述べると

定理10. Φ_2 による restricted direct product $\coprod_n \Phi_2$ は $\Phi_2, \Phi_2\times\Pi$ に inequivalent な non approximately finite countable freely acting ergodic group である。

証明：

x を $\mathcal{A}$ に対する generating でかつ separating unit vector とする。補助定理7 (iii) により

$(\coprod_n \Phi_2)\otimes \bigotimes_n^{(x)}\mathcal{A}$ は $\bigotimes_n^{(\delta_e\otimes x)}(\Phi_2\otimes\mathcal{A})$ に同型で $\Phi_2\otimes\mathcal{A}$ は finite factor より補助定理8により $(\coprod_n\Phi_2)\otimes(\bigotimes_n^{(x)}\mathcal{A})$ は $(A.A)$ を持つ。一方補助定理9により $\Phi_2\otimes\mathcal{A}, (\Phi_2\times\Pi)\otimes\mathcal{B}$ は $(A.A)$ を持たない。よって定理5により $\coprod_n\Phi_2$ は $\Phi_2, \Phi_2\times\Pi$ に inequivalent である。non approximately finite は明らかである。証明終.

注： Ching により inequivalent な non approximately finite group の個数は連続濃度程有るらしいように思われる。([6])

§5. Modular automorphism and algebraic invariant T.

最後に Connes の導入した algebraic invariant T について、これを接合積に持ち込んだ話をして話を終ります。

極最近 Connes は faithful normal state に depend する modular automorphism は inner を除いて決まることを示した。([7]) さらに彼は algebraic invariant T を導入して種々の性質を求めた。([8])　今 $\mathcal{M}$ を G-finite von Neumann algebra とする。これは faithful normal G-invariant state φ が存在することと同値である。ただし G は $\mathcal{M}$ 上の countable automorphism group とする。σ_t^φ を φ に depend して決まる modular automorphism とすると、Takesaki により φ は G-invariant だから σ_t^φ と G は互いに elementwise に可換である。([21])　だから次の automorphism が $G \otimes \mathcal{M}$ 上に定義される：

(1) $$(\iota \otimes \sigma_t^\varphi)(\sum g \otimes x_g) = \sum g \otimes \sigma_t^\varphi(x_g).$$

今 Gelfand–Segal 表現により $\varphi = \omega_\xi$ と仮定できる。ただし ω_ξ は separating かつ generating unit vector ξ に対する vector state である。

さて modular automorphism について、$e \otimes \xi$ は $G \otimes \mathcal{M}$ に対する separating かつ generating unit vector より $e \otimes \xi$ に対する modular automorphism $\sigma_t^{e\otimes\xi}$ は次の様になる。ただし e は G の unit element である。

補助定理 11.

$$\sigma_t^{e\otimes\xi} = \iota \otimes \sigma_t^{\xi} \quad (t \in R^1)$$

証明：

$\omega_{e\otimes\xi}$ が $\iota\otimes\alpha_t^{\varphi}$ に対して KMS 条件を満たすことを示す。

$$\omega_{e\otimes\xi}[(\iota\otimes\alpha_t^{\xi})(\sum_g g\otimes x_g)(\sum_h h\otimes y_h)] = \sum_g \langle g\cdot\alpha_t^{\xi}(x_g)\, y_{g^{-1}}\xi|\xi\rangle$$
$$= \sum_g \varphi[\alpha_t^{\xi}\circ g(x_g)\, y_{g^{-1}}],$$

同様にして

$$\omega_{e\otimes\xi}[(\sum_h h\otimes y_h)(\iota\otimes\alpha_t^{\xi})(\sum_g g\otimes x_g)] = \sum_g \langle g^{-1}(y_{g^{-1}})\,\alpha_t^{\xi}(x_g)\xi|\xi\rangle$$
$$= \sum_g \varphi[y_{g^{-1}}\,\alpha_t^{\xi}(g(x_g))] .$$

φ は α_t^{ξ} に対する KMS *state* より、$(g(x_g), y_{g^{-1}})$ に対して $B=\{0\leq \mathrm{Im}\, z\leq 1\}$ 上で *bounded continuous function* F_g で B の中で *holomorphic* であり次の条件を満たすものが存在する：

$$F_g(t)=\varphi[\alpha_t^{\xi}\circ g(x_g)\, y_{g^{-1}}] ,\quad F_g(t+i)=\varphi[y_{g^{-1}}\,\alpha_t^{\xi}\circ g(x_g)] \quad (t\in R^1).$$

そこで G は *countable* より $(g_i)_{i=1}^{\infty}$ としてよい。

$$\tilde{F}_n(z)=\sum_{i=1}^{n} F_{g_i}(z)$$

とおくと $\tilde{F}_n$ は B 上で *bounded continuous* で B の中で *holomorphic* となる。又 $\{\tilde{F}_n(t)\}_n$ と $\{\tilde{F}_n(t+i)\}_n$ はそれぞれ *uniformly bounded* で R^1, R^1+i 上で *uniformly converge* する。よって *maximum-modulus theorem* により $\{\tilde{F}_n\}_n$ は或る *bounded function* $F(z)$ に *uniformly converge* する。ゆえに F は B 上で *continuous* であり、B の中で *holomorphic* である。さらに

$$F(t)=\sum_g F_g(t)=\omega_{e\otimes\xi}[(\iota\otimes\alpha_t^{\xi})(\sum g\otimes x_g)(\sum h\otimes y_h)]$$
$$F(t+i)=\sum_g F_g(t+i)=\omega_{e\otimes\xi}[(\sum h\otimes y_h)(\iota\otimes\alpha_t^{\xi})(\sum g\otimes x_g)] .$$

φ は α_t^{ξ}-*invariant* より $\omega_{e\otimes\xi}$ は $\iota\otimes\alpha_t^{\xi}$-*invariant* になる。よって

uniquenessにより $\sigma_t^{\iota\otimes\xi} = \iota\otimes\sigma_t^{\xi}$ となる。　　　証明終。

さて次にConnesにより導入されたTの話を少ししよう。$\mathcal{M}$を任意のvon Neumann algebraとする。

$$T(\mathcal{M}) = \{T\in R^1 \mid \text{或るfaithful normal state } \varphi \text{ に対して } \sigma_T^{\varphi} = \iota_{\mathcal{M}}\}$$

としてT(𝓜)を定義するとこれはR^1のsub (additive) groupとなる。([7]) さらに$T\in T(\mathcal{M})$である為の必要十分条件はσ_T^{φ}をinnerにするようなfaithful normal state φ が存在することである。([7]) 話を接合積にもどすと$T(G\otimes\mathcal{M})$は次のように特徴付けることができる：

補助定理12.　$\mathcal{M}$をσ-finite G-finite von Neumann algebraとしξを$\mathcal{M}$に対するseparatingかつgenerating unit vectorとし、ω_ξをG-invariantとすると、$T_0\in T(G\otimes\mathcal{M})$である為の必要かつ十分な条件は次の条件を満たすfamily $(a_g)_{g\in G}$が$\mathcal{M}$の中に存在することである：

(i) $\sum_g a_g^* a_g = 1 = \sum_g a_g a_g^*$,　(ii) $g(a_h) = a_{ghg^{-1}}$　(iii) $\sigma_{T_0}^{\xi}(x) a_g = a_g\, g(x)$

$(g, h\in G,\ x\in\mathcal{M})$

証明：

$T_0\in T(G\otimes\mathcal{M})$ ならば $\sigma_{T_0}^{\psi} = \iota_{G\otimes\mathcal{M}}$ なる$G\otimes\mathcal{M}$上のfaithful normal state ψが存在する。Connesにより

$$\sigma_t^{\iota\otimes\xi}(x) = u_t\,\sigma_t^{\psi}(x)\,u_t^* \quad (t\in R^1,\ x\in G\otimes\mathcal{M}) \tag{2}$$

なる$G\otimes\mathcal{M}$のunitary operator u_t $(t\in R^1)$が存在する。補助定理11

と(2)によって

(3) $$(\iota\otimes\sigma_{T_0}^{\xi})(x) = u_{T_0}\, x\, u_{T_0}^{*} \qquad (x\in G\otimes M)$$

u_{T_0}は unitary operator より

$$u_{T_0} = \sum g\otimes a_g \qquad (\text{w.r.t } \tilde{\omega}_\xi\text{-norm})$$

とすると $\sum_g a_g^* a_g = 1 = \sum a_g a_g^*$ は明らかである. 又(3)によって

$$g\otimes 1 = (\iota\otimes\sigma_{T_0}^{\xi})(g\otimes 1) = u_{T_0}(g\otimes 1)u_{T_0}^{*} \qquad (g\in G)$$

よって $g(a_h) = a_{ghg^{-1}}$ を得る. さらに

$$1\otimes\sigma_{T_0}^{\xi}(x) = u_{T_0}(1\otimes x)u_{T_0}^{*} \qquad (x\in M)$$

よって $\sigma_{T_0}^{\xi}(x)a_g = a_g\, g(x)$ を得る. 逆は $u = \sum_g g\otimes a_g$ とおくと $\sum a_g^* a_g = 1 = \sum a_g a_g^*$ より u は $G\otimes M$ 上の unitary operator となる. 又(iii)により $\sigma_{T_0}^{\varphi\otimes\xi}(x) = u x u^*$ $(x\in G\otimes M)$ となり Connes より T_0 は $T(G\otimes M)$ に属する. 証明終.

この補助定理により次の主結果を証明する:

定理13. M を σ-finite G-finite von Neumann algebra とする. ただし G は M 上の countable automorphism group とする. H を G の subgroup として次の条件を満たすとする:

$G\backslash H \ni g$ に対して

$C_g = \{hgh^{-1} \mid h\in G\}$ は infinite である.

その時

$$T(G\otimes M) \subset T(H\otimes M)$$

証明：

$T(G\otimes\mathcal{M})\ni T_0$に対して、補助定理12より

$$\text{(i)}\ \sum a_g^* a_g = 1 = \sum a_g a_g^*,\quad \text{(ii)}\ h(a_g)=a_{hgh^{-1}},\quad \text{(iii)}\ \sigma_{T_0}^{\xi}(x)a_g = a_g\, g(x)$$
$$(g,h\in G,\ x\in\mathcal{M})$$

なる$\mathcal{M}$のfamily $(a_g)_{g\in G}$がとれる。ただしξは$\mathcal{M}$に対するcyclicかつseparating unit vectorで$\underset{\varphi=}{\omega_\xi}$はG-invariantである。

今もし$G\setminus H$の或るelement g_0に対して$a_{g_0}\neq 0$とすると、φはG-invariantより、(ii)の条件から

(4) $$0\neq\varphi(a_{g_0}^*a_{g_0}) = \varphi[h(a_{g_0})^*h(a_{g_0})] = \varphi(a_{hg_0h^{-1}}^* a_{hg_0h^{-1}})\quad (h\in G),$$

仮定より C_{g_0}はinfiniteより、(4)から

$$+\infty = \sum_{h\in G}\varphi(a_{g_0}^*a_{g_0}) = \sum_{h\in G}\varphi(a^*_{hg_0h^{-1}}a_{hg_0h^{-1}})$$
$$\le \sum_{g\in G}\varphi(a_g^*a_g) = \varphi\Big[\sum_g a_g^*a_g\Big] = \varphi(1)=1$$

これは矛盾。よって$G\setminus H\ni g$に対して$a_g=0$となる。だから補助定理12により$T_0\in T(H\otimes\mathcal{M})$となる。 証明終

$H=\{e\}$とした時上の定理より次の系を得る：

系14. GをICC-groupとした時

$$T(G\otimes\mathcal{M})\subset T(\mathcal{M})$$

が成り立つ。

注： 補助定理11より $\Delta^{it}_{e\otimes\xi} = 1\otimes\Delta^{it}_\xi$を得られると思われるので $S(G\otimes\mathcal{M})\subset S(\mathcal{M})$が十分多くのfaithful normal G-invariant stateが$\mathcal{M}$上に存在する時成り立つように思われる。ただし

$$S(\mathcal{M}) = \bigcap_{\substack{\varphi;\ \text{faithful normal} \\ \text{state of } \mathcal{M}}} \sigma(\Delta_\varphi)$$

である。([8])

最近の情報によればConnesはG-invariantでない場合、$\mathcal{M}$をabelianにして$T(G \otimes \mathcal{M})$, $S(G \otimes \mathcal{M})$について解析しているそうです。

参考文献

[1] D.J.C. Bures : Certain factors constructed as infinite tensor products, Comp Math., 15, 169−191 (1963).

[2] H. Choda : On the crossed product of abelian von Neumann algebras II, Proc. Japan Acad., 43, 198−201 (1967).

[3] H. Choda and M. Echigo : Some Remarks on von Neumann algebras with the Property Q, Memoirs of Osaka Gakugei University., 13, 13−21 (1964).

[4] M. Choda and H. Choda : A remark on a construction of finite factors I, II, Proc. Japan. Acad., 40, 471−478 (1964), 479−481 (1964).

[5] W. Ching: Non-isomorphic non-hyperfinite factors, Canad. J. Math., 21, 1293-1308 (1969).

[6] ________: A continuum of non-isomorphic non-hyperfinite factors, Comm on pure and applied. Math., XXIII, 921-937 (1970).

[7] A. Connes: Groupe modulaire d'une algebre de genre denombrable, to appear.

[8] ________: Un nouvel invariant pour les algebres de von Neumann, C.R. Acad. Paris, Ser. A 273, 900-903 (1971).

[9] H.A. Dye: On groups of measure preserving transformations I, Amer. J. Math., 81, 119-159 (1959).

[10] E.G. Effros and F. Hahn: Locally compact transformation groups and C*-algebras., Memoirs of the Amer. Math. Soc, 75 (1967).

[11] J. Glimm: ~~Type~~ Families of induced representations, Pacific J. Math., 12 (1962) 885-911.

[12] A. Guichardet: Caractères des algèbres de Banach involutives, Ann. Inst. Fourier., 13, (1963) 1-81.

[13] ________: Produits tensoriels infinis et représentations des relations d'anticommutation. Ann. Sci. École Norm. Sup.,

[14] M. Henle : Galois theory of W^*-algebras, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[15] W. Krieger : On the isomorphy problem for ergodic equivalence relations, Math. Z., 103, (1968) 78–84.

[16] Y. Misonou : On divisors of factors, Tohoku Math. J., 3, (1951) 132–135.

[17] F.J. Murray and J. von Neumann : On rings of operators III, IV, Ann. Math., 41, (1940) 94–161, 44, (1943) 716–808.

[18] M. Nakamura and Z. Takeda : A Galois theory for finite factors, Proc. Japan Acad., 36 (1960) 258–260.

[19] T. Saitô : The direct product and crossed product of rings of operators, Tohoku Math. J., 11, (1959) 229–304.

[20] S. Sakai : Asymptotically abelian II_1-factors, Publ. Res. Inst. Soc., 4, (1968) 299–307.

[21] M. Takesaki : Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture notes in Mathematics 128, Springer-Verlag (1970).

[22] [redacted]__________ : On the cross-norm of the direct product of C^*-algebras, Tohoku Math. J., 16, 111–122 (1964).

[23] __________ : Covariant representations of C^*-algebras and their locally compact automorphism groups,

Acta. Math., 119, (1967) 273-303.

[24] J. Tomiyama : Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Lecture note, Univ of Copenhagen., (1970).

[25] T. Turumaru : On the crossed product of operator algebras., Tohoku Math. J., t10, (1958) 355-365.

[26] G. Zeller-Meier : Produits croisés d'une C^*-algèbre par un groupe d'automorphismes, J. Math. pures et appl., 47, [redacted] (1968) 101-239.

[27] Y. Haga and Z. Takeda : Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 24 (1972) 167-190.